

Différents types de raisonnement en mathématiques

Terminale, spécialité mathématique
2023–2024

Il est nécessaire d'avoir préalablement lu le document intitulé « langage mathématique ».

1 Démontrer une assertion universelle « $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$ est vrai »

Méthode 1: On veut montrer que le prédicat \mathcal{P} dépendant de la variable x , est vrai pour tout x dans un certain ensemble E .

Pour cela, la rédaction commence invariablement par « Soit $x \in E$ ».

Cette phrase permet de **raisonner sur un seul élément** de l'ensemble E , en vue de montrer que $\mathcal{P}(x)$ est vrai pour **cet** élément-là, qu'on appelle x . Le raisonnement est le suivant: le prédicat est **vrai pour un élément arbitrairement fixé** dans l'ensemble E , donc ce prédicat est **vrai pour tout élément** de l'ensemble.

Exemple 1: Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par $f(x) = x + \frac{1}{x}$ est minorée^a par 2.

a. La fonction f est minorée par m (resp. par la fonction g) signifie que pour tout x dans le domaine de définition de f , on a $f(x) \geq m$ (resp. $f(x) \geq g(x)$)

J'écris la conclusion visée en langage mathématique : $\forall x \in \mathbb{R}_+, x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. (c'est-à-dire qu'on fixe un élément arbitraire dans le domaine ciblé)

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \iff x\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 2x \iff x^2 + 1 \geq 2x \iff x^2 - 2x + 1 \geq 0 \iff (x - 1)^2 \geq 0$$

Cette dernière assertion est vraie (un carré est toujours positif ou nul), donc la première assertion est également vraie (grâce aux équivalences).

Mais attention, au moment où l'on écrit la première assertion « $x + \frac{1}{x} \geq 2$ », on n'affirme absolument pas qu'elle est vraie (c'est la conclusion visée), **on affirme simplement que l'équivalence est vraie** (car on a multiplié les deux membres de l'inégalité par un **nombre positif** donc le sens de l'inégalité ne change pas), c'est-à-dire que pour le nombre x fixé, les deux premières inégalités sont soit toutes deux vraies, soit toutes deux fausses.

Exemple 2: Montrer que la fonction exponentielle est minorée sur \mathbb{R} par la fonction affine $x \mapsto x + 1$.

On doit montrer: $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$.

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^x - (x + 1)$.

g est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} , donc est dérivable sur \mathbb{R} , et on a $g'(x) = e^x - 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. (toujours la même méthode lorsque la conclusion visée est une assertion universelle)

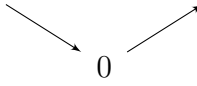
$$e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff e^x > e^0 \iff x > 0$$

La dernière équivalence se justifiant par la stricte croissance de la fonction exponentielle sur \mathbb{R} .

On en déduit le tableau de variations ci-contre, où l'on a calculé $g(0) = e^0 - (0 + 1) = 1 - 1 = 0$.

Le tableau de variations permet d'affirmer que la fonction g admet 0 pour minimum, ce qui signifie:

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0 \text{ c'est-à-dire: } \forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
g			

Exemple 3: Démontrer l'inégalité triangulaire : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |x + y| \leq |x| + |y|$.

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ (toujours la même chanson: on fixe deux éléments arbitraires dans le domaine ciblé ^a).

$|x + y| \leq |x| + |y| \iff (x + y)^2 \leq (|x| + |y|)^2$ car la fonction carré est croissante sur \mathbb{R}_+ .

$|x + y| \leq |x| + |y| \iff x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|x||y| + y^2$ car $|x|^2 = x^2$ et $|x| \times |y| = |xy|$. Finalement:

$|x + y| \leq |x| + |y| \iff xy \leq |xy|$.

Un nombre réel étant toujours inférieur ou égal à sa valeur absolue, cette dernière assertion est vraie, ce qui démontre par équivalences que la première assertion est vraie.

a. Quand on aura vu le produit cartésien de deux ensembles, on écrira plus rigoureusement « Soit $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ »

2 Réfuter une assertion universelle: méthode du contre-exemple

Méthode 2: Pour montrer qu'une assertion commençant par un quantificateur universel est fausse, il suffit de donner un contre-exemple particulier.

Exemple 4: Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est **paire** si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)$.

Montrer que $f : x \mapsto x^3 + x^2 + x + 1$ n'est pas paire.

Ne surtout pas écrire ceci:

$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ et $f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 - x + 1 = -x^3 + x^2 - x + 1$.

Ces deux expressions ne sont pas égales, donc $f(x) \neq f(-x)$, donc f n'est pas une fonction paire.

D'une part $f(x) = f(-x)$ pour $x = 0$, donc écrire $f(x) \neq f(-x)$ n'a pas de sens si on ne déclare pas le domaine d'appartenance de la variable x .

D'autre part, deux expressions différentes peuvent être synonymes, c'est-à-dire désigner le même objet mathématique.

Par exemple, $\sum_{k=1}^{45} k$ et $13 + \sum_{k=1}^9 2^k$ sont des nombres égaux mais les expressions sont différentes.

Ou encore, pour tout $x \neq 1$, les expressions (différentes) $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ et $x + 1$ désignent le même nombre.

Pour réfuter une assertion universelle, il faut et il suffit de montrer qu'il existe un objet pour lequel l'assertion est fausse.

$f(1) = 4$ et $f(-1) = 0$ donc $f(1) \neq f(-1)$ donc $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq f(-x)$.

Cette dernière assertion (existentielle) est l'exacte négation de l'assertion (universelle) :

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)$.

(la négation de cette assertion universelle **n'est surtout pas** cette autre assertion universelle:

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq f(-x)$)

Finalement, la négation de « f est une fonction paire » est vraie, c'est-à-dire que f n'est pas paire.

3 Démontrer une assertion existentielle « $\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$ est vrai »

Méthode 3: On peut simplement exhiber un objet $x \in E$ pour lequel $\mathcal{P}(x)$ est vraie.

Exemple 5: Montrer que l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$ admet une solution entière.

L'assertion existentielle à prouver est: $\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 - 5x + 6 = 0$.

Il suffit d'exhiber la valeur $x = 2$ pour montrer que l'assertion existentielle est vraie :

$2^2 - 5 \times 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$

Méthode 4: Quand plusieurs quantificateurs s'enchaînent, c'est le premier quantificateur qui fait que l'assertion est dite universelle ou existentielle.

Exemple 6: Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (2x - 3)^2 - 4x^2$ est affine.

L'assertion à prouver est : $\exists a, b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ ^a.

Il s'agit bien d'une assertion existentielle puisqu'elle commence par « il existe ».

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = (2x - 3)^2 - 4x^2 = 4x^2 - 12x + 9 - 4x^2 = -12x + 9$

On a trouvé explicitement le coefficient directeur $a = -12$ et l'ordonnée à l'origine $b = 9$, ce qui montre que la fonction est affine.

^a. Dans le chapitre intitulé « Dénombrément », on verra que la formulation rigoureuse de cette assertion est $\exists(a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b$

Méthode 5: Il est parfois possible de montrer une assertion existentielle sans exhiber d'objet: soit en raisonnant par disjonction des cas ^a, soit en raisonnant par l'absurde ^b.

^a. voir méthode 10

^b. voir méthode 11

Remarque 1: Dans le chapitre intitulé « Continuité et convexité », nous verrons le théorème des valeurs intermédiaires dont la conclusion est l'existence dans un certain intervalle I d'un réel x vérifiant $f(x) = 0$ pour une fonction f vérifiant certaines hypothèses; et ce théorème n'exhibe aucun réel x , il ne fait que donner son existence.

4 Démontrer une implication directement

Méthode 6: Pour montrer $P \implies Q$, on suppose que P est vraie et on démontre que Q est vraie. C'est légitime : lorsque P est fausse, l'implication est vraie, de sorte qu'il n'y a rien à démontrer. Autrement dit, démontrer l'implication $P \implies Q$, c'est démontrer que si P est vraie, alors Q est vraie. C'est là le lien le plus fort entre implication et l'expression « si ... alors ... ».

Remarque 2: L'implication n'est pas commutative ! L'implication $Q \implies P$ est appelée **implication réciproque** de $P \implies Q$. Les valeurs de vérités d'une implication et de sa réciproque sont différentes, sauf s'il y a équivalence.

Remarque 3: Pour montrer une assertion universelle du type: $\forall x \in E, P(x) \implies Q(x)$, on fixe arbitrairement un élément x dans E (rédaction ultra concise: « Soit $x \in E$ »), on suppose que $P(x)$ est vraie, et on va montrer que $Q(x)$ est vraie.

L'hérédité de TOUTE récurrence est de la forme précédente (voir Méthode 9)

Exemple 8: Prouver que, si **une** fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est décroissante sur \mathbb{R}_+ , alors elle est majorée. Que dire de la réciproque ?

En langage un peu plus formalisé, on doit montrer:

Pour toute fonction définie sur \mathbb{R}_+ , on a: f décroissante sur $\mathbb{R}_+ \implies f$ majorée.

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}_+ .

Supposons qu'elle est décroissante sur son domaine de définition, ce qui donne :

pour tout nombre $x \geq 0$, on a $f(x) \leq f(0)$.

On a donc montré que le nombre $f(0)$ est un majorant de la fonction f .

La réciproque se formule ainsi:

Pour toute fonction définie sur \mathbb{R}_+ , on a: f majorée $\implies f$ décroissante sur \mathbb{R}_+ .

Soit f définie sur \mathbb{R}_+ par $f(x) = 2 + \sin x$.

f est majorée (par 3) et f n'est pas décroissante sur \mathbb{R}_+ (car $0 < \frac{\pi}{2}$ mais les images de 0 et de $\frac{\pi}{2}$ ne sont pas dans un ordre inversé: on a $f(0) = 2$ et $f(\frac{\pi}{2}) = 3$) donc l'implication réciproque est fausse^a.

a. La table de vérité de l'implication dans le document « Langage mathématique » montre que le seul cas où une implication $A \implies B$ est fausse est lorsque A est vraie et B est fausse. L'implication est vraie dans tous les autres cas.

5 Démontrer une implication à l'aide de sa contraposée

Méthode 7: L'implication **contraposée** de « $P \implies Q$ » est « $(\text{non } Q) \implies (\text{non } P)$ ». Une implication et sa contraposée sont deux assertions équivalentes (elles ont la même table de vérité)^a, de sorte que pour démontrer l'une, il suffit de démontrer l'autre.

Pour prouver une implication $P \implies Q$, on peut donc supposer que Q est faux et en déduire que P est faux. On a alors montré $(\text{non } Q) \implies (\text{non } P)$, donc on a montré $P \implies Q$.

a. voir document intitulé « Langage mathématique », section « Connecteurs logiques »

Exemple 9: montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \text{ impair} \implies n \text{ impair}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ (toujours le même début de rédaction pour montrer une assertion universelle).

La contraposée de « $n^2 \text{ impair} \implies n \text{ impair}$ » est « $\text{non}(n \text{ impair}) \implies \text{non}(n^2 \text{ impair})$ », c'est-à-dire « $n \text{ pair} \implies n^2 \text{ pair}$ ».

On montre cette implication en supposant que l'entier n qu'on a arbitrairement fixé est pair, c'est-à-dire: $\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k$.

On a alors $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times (2k^2)$ et donc n^2 est un multiple de 2: n^2 est pair.

6 Démontrer une équivalence

Méthode 8: On peut démontrer une équivalence directement, ou bien par double implication. Dans les deux cas, il est crucial de commencer par préciser le domaine de validité des équivalences ou des implications.

Exemple 10: Résoudre dans \mathbb{R}_+ l'équation $x = 6 + \sqrt{x}$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$

$$x = 6 + \sqrt{x} \iff x - 6 = \sqrt{x}$$

(Prendre $x = 4$ pour constater que « $x - 6 = \sqrt{x} \iff (x - 6)^2 = x$ » est une assertion fausse.)^a

Or $\sqrt{x} \geq 0$, donc $x - 6 \geq 0$, donc $x \geq 6$.

Soit $x \in [6; +\infty[$

$$x - 6 = \sqrt{x} \iff (x - 6)^2 = \sqrt{x}^2 \text{ car } x - 6 \geq 0 \text{ et } \sqrt{x} \geq 0 \text{ et la fonction carré est croissante sur } \mathbb{R}_+$$

$$\iff x^2 - 12x + 36 = x$$

$$\iff x^2 - 13x + 36 = 0$$

$$\iff x = \frac{13 - 5}{2 \times 1} = 4 \text{ ou } x = \frac{13 + 5}{2 \times 1} = 9$$

$$\text{car le discriminant est } \Delta = (-13)^2 - 4 \times 1 \times 36 = 25 = 5^2$$

$$\iff x = 9$$

La dernière équivalence n'est vraie que grâce à cette déclaration.

a. pour a et b dans \mathbb{R} , $a = b$ n'est en général pas équivalent à $a^2 = b^2$, il suffit de prendre $b = -a$ pour s'en rendre compte. Plus précisément: $\forall a, b \in \mathbb{R}, a^2 = b^2 \iff a^2 - b^2 = 0 \iff (a - b)(a + b) = 0 \iff (a = b \text{ ou } a = -b)$

Exemple 11: montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \text{ impair} \iff n \text{ impair}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a montré à l'exemple 9: $n^2 \text{ impair} \implies n \text{ impair}$.

On montre ensuite l'implication réciproque.

Supposons n impair, c'est-à-dire: $\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k + 1$.

On a alors: $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$,

donc on a: $\exists k' \in \mathbb{N}, n^2 = 2k' + 1$ (il suffit de prendre $k' = 2k^2 + 2k$).

On a montré: $\forall n \in \mathbb{N}, n \text{ impair} \implies n^2 \text{ impair}$.

Finalement, on a montré par double implication l'équivalence : $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \text{ impair} \iff n \text{ impair}$.

7 Raisonnement par récurrence

Méthode 9: Soit $P(n)$ un prédicat dépendant d'un entier n . Si

Initialisation : $P(n_0)$ est vrai pour un certain entier n_0 ,

Transmission : $\forall n \in \mathbb{N} \cap [n_0; +\infty[, P(n) \implies P(n + 1)$,
alors $P(n)$ est vraie pour **tout** entier $n \geq n_0$.

8 Raisonnement par disjonction des cas

Méthode 10: Pour prouver une assertion, on peut la prouver pour chaque cas d'une famille exhaustive de cas.

Exemple 12: Prouver que pour tout entier naturel n , $n(n + 1)$ est pair.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Ou bien n est pair, et alors tout multiple de n est aussi un multiple de 2. En particulier, le multiple $n(n + 1)$ est un multiple de 2 (donc il est pair);

ou bien n n'est pas pair, et alors $n + 1$ est pair et le même raisonnement permet d'affirmer que $n(n + 1)$ est pair.

Exemple 13: Résoudre sur $[1; +\infty[$ l'inéquation $\sqrt{x - 1} \geq x - 4$

Soit $x \in [1; +\infty[$.

1^{er} cas: $1 \leq x \leq 4$.

On a $\sqrt{x - 1} \geq 0 \geq x - 4$ donc x est solution.

2^{ème} cas: $x > 4$.

$\sqrt{x - 1} \geq x - 4 \iff x - 1 \geq (x - 4)^2$ car $\sqrt{x - 1}$ et $x - 4$ sont tous deux des nombres positifs et la fonction carré est croissante sur \mathbb{R}_+ .

$$\sqrt{x - 1} \geq x - 4 \iff x - 1 \geq x^2 - 8x + 16$$

$$\sqrt{x - 1} \geq x - 4 \iff x^2 - 9x + 17 \leq 0$$

Le trinôme a pour discriminant $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 1 \times 17 = 13$ donc ses racines sont :

$x_1 = \frac{9 - \sqrt{13}}{2} \leq 4$ et $x_2 = \frac{9 + \sqrt{13}}{2} > 4$. **Or un discriminant est toujours du signe de son coefficient dominant, sauf entre ses racines (s'il en a), donc:**

$$\sqrt{x - 1} \geq x - 4 \iff x \in [x_1; x_2]$$

$$\sqrt{x - 1} \geq x - 4 \iff x \in]4; x_2] \text{ car } x > 4 \text{ et } x_1 \leq 4 \leq x_2$$

Finalement les solutions de l'inéquation sont $[1; 4] \cup]4; x_2] = [1; x_2] = \left[1; \frac{9 + \sqrt{13}}{2}\right]$

9 Raisonnement par l'absurde

Méthode 11: Pour prouver P , il suffit de prouver que la négation de P implique « une absurdité ». Plus formellement, un raisonnement par l'absurde vise à montrer $\text{non}(P) \implies Q$ où Q est une assertion fausse^a.

a. de très grands mathématiciens du XX^e rejettent la validité du raisonnement par l'absurde, mais c'est parce que leur logique, dite intuitionniste, n'est pas la même que la logique classique vue dans le document « Langage mathématique ». Un des axiomes de la logique classique est le « tiers exclus » disant que l'assertion $(P \text{ ou } (\text{non } P))$ est une assertion vraie quelle que soit l'assertion P . En logique intuitionniste, le « tiers exclus » n'est plus un axiome et par conséquent le raisonnement par l'absurde n'est pas accepté. Au lycée, nous faisons de la logique classique, c'est déjà bien assez dur.

Exemple 14: Montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Supposons $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

$\sqrt{2} \neq 0$ (car $0^2 \neq 2$) donc $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}^*$, donc il existe deux entiers non nuls a et b premiers entre eux^a tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

On en déduit $2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$ et donc $2b^2 = a^2$.

En particulier a^2 est pair. On a vu dans l'exemple 9 qu'il s'en suit que a est pair, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = 2k$.

On a alors $a^2 = 4k^2$ et la relation $2b^2 = a^2$ donne alors $b^2 = 2k^2$.

Le nombre b^2 est donc lui aussi pair, donc b aussi. Donc 2 est un diviseur commun à a et b , ce qui est absurde car ces deux nombres sont premiers entre eux.

L'assertion initiale $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ne peut donc pas être vraie, donc elle est fausse, et on peut donc affirmer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

a. deux entiers sont premiers entre eux si et seulement si leur pgcd vaut 1